43 分球遊戲…讓數字說話

在數位時代裡,所有產品都科技化,電子產品就是由 0 與 1 兩個簡單的數字所組合而成。在統計的世界裡，讓統計數字說話是無可避免的傾向。處理數字與解讀數字成為現代人的當務之急。可見瞭解數字，特別是清楚整數的性質，是很重要的一門學問。就讓我們以一道分球遊戲來測試讀者對整數的瞭解。

拿出 12 顆球讓甲、乙兩人分，首先甲將 12 顆球排成 3×4 的長方形，然後將最後一列的 4 顆球取走，如下圖所示，黑色球代表被甲取走的球：

○○●

○○●

○○●

○○●

接下來乙將剩下的 8 顆球排成 4×2 的長方形，同樣將最後一行的 2 顆球取走，如下圖所示，黑色球代表被乙取走的球：

○○○●

○○○●

接著輪回甲，將剩下的 6 顆球排成 6×1 的長方形，並取走最後一行的 1 顆球：

○○○○○●

接下來乙將剩下的 5 顆球排成 5×1 的長方形，並取走最後一行的 1 顆球：

○○○○●

接著輪回甲，將剩下的 4 顆球排成 2×2 的長方形，並取走最後一行的 2 顆球：

○●

○●

接下來乙將剩下的 2 顆球排成 2×1 的長方形，並取走最後一行的 1 顆球：

○●

最後輪到甲，需將剩下的 1 顆球排成長≥ 2的長方形，但這不可能，所以甲輸。

仿照這樣的規則所進行的遊戲，就是我們要談的分球遊戲：

甲、乙兩人輪流玩分 24 顆球的遊戲，遊戲程序是這樣的：甲將 24 個球排成長方形（長 a 個，寬 b 個，並要求 $a \ge 2$），然後將最後一行的 b 個球拿走。接下來乙將剩下的球也排成長方形（長與寬的要求同甲），同樣拿走最後一行的球。仿照這樣的規則，甲、乙輪流取球，最後無法將剩球排成長≥ 2的長方形者輸，即取完剩 1 顆球者贏。

試問：誰有必勝的策略？又其策略為何？

分球遊戲的另一種說法是這樣的，給定 n 個球，甲、乙兩人輪流取球，每次從剩下的球中，取走這剩下球數的因數個，但不可以全部取走（例如，當剩下 6 顆球時，可以取走 1, 2 或 3 顆球，但不能取走全部的 6 顆球），無法取球者輸。到底什麼情形下會發生無法取球呢？那一定是剩下的球只剩 1 顆的狀況，即取完之後，剛好剩下 1 球的人贏。

論奇談偶是小學生學會分辨正整數

$$1,2,3,4,\cdots$$

所代表的意義之後，所必須學會的一種分門別類的數學概念。這種二分法的分類方式，在日常生活中也經常碰到，例如搬弄是非，道人長短，存款增減，股市漲跌等，都是將事情簡單化成兩個對立的層面來談的意思。但是將正整數分成奇數與偶數兩大類，可能比你所想像的複雜多了，原因就在於它是有數學涵意的。就讓我們利用奇偶概念揭開這道分球遊戲的神秘面紗。

如果剩下的球數為 k 顆時，那麼以 k 的奇偶討論如下：

(1) 當 k 是偶數時，令 $k=2a$，可以將剩下的球排成 $2a\times 1$ 的長方形，在取走最後一行的 1 顆球後，剩下 $2a-1$ 顆球，即剩下奇數顆球。

(2) 當 k 是奇數時，如果 $k=1$，無法操作，輸；如果 k 是大於 1 的奇數，設這 k 顆球排成 $a\times b$ 的長方形，顯然 a 與 b 都是奇數，又根據要求 $a\ge 2$，所以在取走最後一行的 b 顆

球後，剩下 $ab-b=(a-1)b$ 顆球。因為 $a-1$ 是偶數，所以會剩下偶數顆球。

從討論中得知：當操作完後，讓剩下的球數變成奇數顆時，對手不是輸球(剩下 1 顆球)，就是對手在操作完後剩下偶數顆球（剩下超過 1 顆的奇數顆球)。又可以將偶數顆球再次操作完讓它變成奇數顆球。所以只要操作完，讓剩下球數為奇數顆者可以取得勝利。

因此，本遊戲開始有 24 顆球，先玩的甲可以有如下兩種贏的策略：

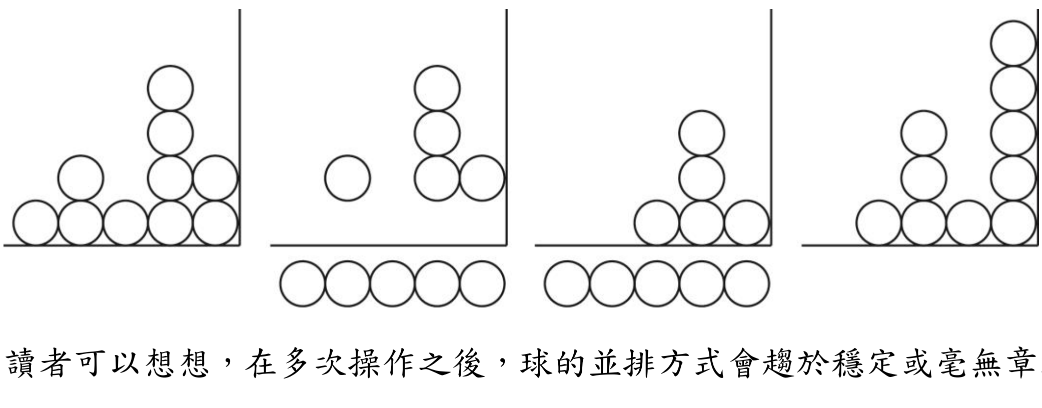
① 將球排成 24×1 的長方形，取走 1 顆後，剩 23 顆球。

② 將球排成 8×3 的長方形，取走 3 顆後，剩 21 顆球。

也就是說，當輪到你操作時，若剩餘的球數為偶數，則可以贏得比賽，但若為奇數，也不用氣餒，可以等對手犯錯（給你偶數個剩餘的球)，再贏回來。總之，懂得奇偶操作的人，會有最大的取勝機會。

這道分球遊戲可以推廣到多堆的情形，甚至也可以稍微改變一下取球的規則。

最後讓我們來欣賞一道有意思的移球遊戲：首先將 10 顆球隨意的並排在一起，如下圖中的第一圖所示，然後將最底下的那一列球移到下方，如下圖中的第二圖所示，接著將上方的球下降並靠攏，如下圖中的第三圖所示，最後將移走的那一列球豎起來擺回球堆的最右行，如下圖中的第四圖所示。我們將這四個步驟的移動稱為一次操作，當最原始的 10 顆球隨意的並排在一起後，可以無止境操作下去，每一次操作之後會得到新的 10 顆球的排列。



有興趣的讀者可以想想，在多次操作之後，球的並排方式會趨於穩定或毫無章法呢？我們也可以討論：將 10 顆球改為 n 顆球的情形。